

PHẦN TƯ DUY TOÁN HỌC



ĐỀ MINH HỌA ĐÁNH GIÁ TƯ DUY

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

Thời gian: 60 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 40 câu

ĐỀ LUYỆN THI

Câu 1: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $y = -x^4 - x^2 + 1$. B. $y = \frac{3x+1}{x+1}$. **C. $y = x^4 + x^2 + 1$.** D. $y = x^3 - 3x$.

Câu 2: Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 6)$. Tính tích $P = abc$.

- A. $P = -6$.** B. $P = 6$. C. $P = -3$. D. $P = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ nên $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 4 \end{cases}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 6)$ nên ta có $c = 6$.

$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = -16a \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 8a = 0 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\longrightarrow P = abc = -6.$$

Câu 3: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **đúng**, phát biểu nào **sai**?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x}$ không xác định trong khoảng $\left(\frac{-\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$	Đ	
b)	Có 20 giá trị nguyên m để hàm số $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm chẵn.		S

Lời giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \tan x \neq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Ta chọn $k=0 \rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{-\pi}{4} \\ x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ nhưng điểm $-\frac{\pi}{4}$ thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right).$

Vậy hàm số không xác định trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right).$

b) Sai : Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = 3m \sin 4(-x) + \cos 2(-x) = -3m \sin 4x + \cos 2x$.

Để hàm số đã cho là hàm chẵn thì

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow -3m \sin 4x + \cos 2x = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow 4m \sin 4x = 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 4: Kéo biểu thức ở các ô vuông thả vào vị trí thích hợp trong các câu sau:

$$k\pi$$

$$4\pi$$

$$\frac{k\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi}{3}$$

(với $k \in \mathbb{Z}$)

1) Hàm số $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ không xác định với mọi x có dạng

2) Chu kì của hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2}$ là

Lời giải

1) Hàm số $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Chu kỳ của $\sin \frac{x}{2}$ là $T_1 = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ và Chu kỳ của $\cos \frac{3x}{2}$ là $T_2 = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|} = \frac{4\pi}{3}$

Chu kì của hàm ban đầu là bội chung nhỏ nhất của hai chu kì T_1 và T_2 vừa tìm được ở trên.

$$\text{Suy ra } BCNN(T_1, T_2) = \frac{|T_1 \cdot T_2|}{UCLN(T_1, T_2)} = \frac{4\pi \cdot \frac{4\pi}{3}}{\frac{4\pi}{3}} = 4\pi$$

Chu kì của hàm ban đầu $T = 4\pi$

Câu 5: Có một giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m \in (-2; 0)$. **B. $m \in (1; 3)$** C. $m \in (3; 5)$. D. $m \in (0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 6: Phương trình $(m+1)x^2 + 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (a; b]$. Tính $a + b$

- A. 2. **B. 3.** C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn B

TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ phương trình $\Leftrightarrow -5=0$ (vô lý)

TH2: $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m+1)(2m-3) \geq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(-m+4) \geq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 4 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 4 \Rightarrow a + b = 3.$$

Câu 7: Một rạp chiếu phim có chi phí tổ chức là 20 nghìn đồng cho mỗi vé bán ra. Theo nghiên cứu, nếu giá vé là x (nghìn đồng) thì số lượng vé bán được sẽ là $q(x) = 120 - x$ ($x \in \mathbb{N}^*$). Hãy xác định giá vé cho mỗi ghế sao cho lợi nhuận mà rạp thu được là cao nhất?

- A. 42 nghìn đồng. B. 60 nghìn đồng. C. 55 nghìn đồng. **D. 70 nghìn đồng.**

Lời giải

1. Chi phí tổ chức:

Chi phí để tổ chức một buổi chiếu phim với số lượng vé bán ra là $q(x)$ được tính như sau:

$$\text{Chi phí} = q(x).20 = (120 - x).20 = 2400 - 20x \text{ nghìn đồng}$$

2. Doanh thu:

Số tiền rạp thu được khi bán vé là:

$$\text{Doanh thu} = x(120 - x) = 120x - x^2 \text{ (nghìn đồng)}$$

3. Lợi nhuận:

Lợi nhuận thu được bằng doanh thu trừ chi phí:

$$\text{Lợi nhuận} = 120x - x^2 - (2400 - 20x) = 140x - x^2 - 2400$$

4. Xác định giá vé tối ưu:

$$f(x) = 140x - x^2 - 2400, 0 \leq x \leq 120$$

$$\Rightarrow \max_{[0;120]} f(x) = 2500 \text{ đạt được khi } x = 70 \text{ (nghìn đồng)}$$

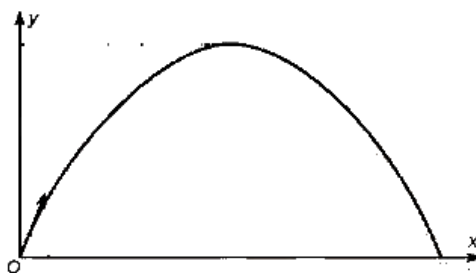
Câu 8: Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol có phương trình: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x, x > 0$. Trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O, y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất. Tìm **khoảng cách xa nhất** từ gốc O đến một điểm trên quỹ đạo của vật.

A. $5\sqrt{3}$

B. 6

C. $3\sqrt{2}$

D. $6\sqrt{2}$



Lời giải

Hoành độ của điểm xa nhất mà vật có thể đạt được là $x = 2 \cdot \frac{b}{2a} = 6$

Gọi $M(x; y)$ là tọa độ của điểm có khoảng cách xa nhất từ gốc O trên quỹ đạo của vật này

$$\text{Ta có } d(O; M) = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)^2}$$

$$\text{Xét } f(x) = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)^2}, 0 < x \leq 6$$

Suy ra GTLN của $f(x)$ là 6, đạt tại $x = 4$

Vậy **khoảng cách xa nhất** từ gốc O đến một điểm trên quỹ đạo của vật là $4\sqrt{2}$

Câu 9: Số liệu thống kê tình hình đỗ đại học của học sinh trường THPT X trong hai năm 2018 và 2019 như sau:

Đơn vị: người

STT	Trường Đại học	Khóa tốt nghiệp 2018		Khóa tốt nghiệp 2019	
		Nữ	Nam	Nữ	Nam
1	Khoa học Tự nhiên	15	50	20	45
2	Bách khoa	20	43	15	32
3	Kinh tế	5	20	10	55
4	Ngoại thương	10	34	5	12

Kéo biểu thức ở các ô vuông thả vào vị trí thích hợp trong các câu sau:

65%

4,7%

70%

5,2%

- Tỷ lệ phần trăm của số học sinh nữ đổ vào cả hai trường Đại học Khoa học Tự nhiên và Đại học Bách khoa trong năm 2018 so với tổng số học sinh nữ đổ đại học năm đó là:
- Sự chênh lệch về tổng số học sinh đổ vào hai trường Đại học Bách khoa và Đại học Kinh tế trong cả hai năm 2018 và 2019 so với tổng số học sinh đổ vào hai trường Đại học Khoa học Tự nhiên và Đại học Ngoại thương trong cùng thời gian là:

Lời giải

1)

- Số học sinh nữ đổ Đại học Khoa học Tự nhiên và Đại học Bách khoa năm 2018:

Khoa học Tự nhiên: 15 người

Bách khoa: 20 người

Tổng cộng: $15 + 20 = 35$ người

- Tổng số học sinh nữ đổ đại học năm 2018:

$$15 + 20 + 5 + 10 = 50 \text{ người}$$

- Tỷ lệ phần trăm của số học sinh nữ đổ vào cả hai trường:

$$\frac{35}{50} \cdot 100 = 70\%$$

2)

- Tổng số học sinh đổ vào hai trường Đại học Bách khoa và Đại học Kinh tế trong cả hai năm:

Bách khoa: $20 + 43 + 15 + 32 = 110$ người

Kinh tế: $5 + 20 + 10 + 55 = 90$ người

Tổng cộng: $110 + 90 = 200$ người

- Tổng số học sinh đổ vào hai trường Đại học Khoa học Tự nhiên và Đại học Ngoại thương trong cả hai năm:

Khoa học Tự nhiên: $15 + 50 + 20 + 45 = 130$

Ngoại thương: $10 + 34 + 5 + 12 = 61$

Tổng cộng: $130 + 61 = 191$ người

- Sự chênh lệch giữa hai nhóm:

Chênh lệch: $\frac{200 - 191}{191} \cdot 100 = 4,7\%$

Câu 10: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để chọn được số mà trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ.

A. $\frac{155}{378}$.

B. $\frac{127}{378}$.

C. $\frac{143}{378}$.

D. $\frac{139}{378}$.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = A_{10}^5 - A_9^4 = 27216$

Gọi A là biến cố “chọn được số có 5 chữ số khác nhau mà trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ”.

Để chọn được số có 5 chữ số khác nhau mà trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Số được chọn có 5 chữ số chẵn. Trong trường hợp này có $5! - 4! = 96$ số.

Trường hợp 2. Số được chọn có 1 chữ số lẻ và 4 chữ số chẵn.

- Chọn 4 chữ số chẵn và sắp xếp vị trí 4 số ta có $C_5^4 \cdot 4! = 120$. Khi đó tạo thành 5 khe.

- Chọn 1 chữ số lẻ và sắp xếp vào 1 trong 5 khe, ta có $C_5^1 \cdot 5 = 25$

- Do đó có $120 \cdot 25 = 3000$ (kể cả số 0 đứng đầu)

- Số 5 chữ số khác nhau gồm 1 chữ số lẻ và 4 chữ số chẵn, trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ mà số 0 đứng đầu là: $C_4^3 \cdot 3! \cdot C_5^1 \cdot 4 = 480$

- Vậy có $3000 - 480 = 2520$ số

Trường hợp 3. Số được chọn có 2 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn.

- Chọn 3 chữ số chẵn và sắp xếp vị trí 3 số ta có $C_5^3 \cdot 3! = 60$. Khi đó tạo thành 4 khe.

- Chọn 2 chữ số lẻ và sắp xếp vào 2 trong 4 khe, ta có $C_5^2 \cdot A_4^2 = 120$

- Do đó có $60 \cdot 120 = 7200$ số (kể cả số 0 đứng đầu)

- Số 5 chữ số khác nhau gồm 2 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn, trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ mà số 0 đứng đầu là: $C_4^2 \cdot 2! \cdot C_5^2 \cdot A_3^2 = 720$

- Vậy có $7200 - 720 = 6480$ số

Trường hợp 4. Số được chọn có 3 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn.

- Chọn 2 chữ số chẵn và sắp xếp vị trí 2 số ta có $C_5^2 \cdot 2! = 20$

- Chọn 3 chữ số lẻ và sắp xếp vào 3 vị trí có $C_5^3 \cdot 3! = 60$

- Vậy có $20 \cdot 60 = 1200$ số

Vậy ta có $n(A) = 96 + 2520 + 6480 + 1200 = 10296$

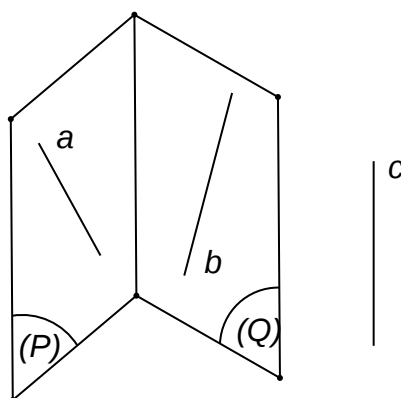
Vậy xác suất cần tìm là: $P = \frac{10296}{27216} = \frac{143}{378}$

Câu 11: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

- A. Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) .
 B. Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .
 C. Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) .
 D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

Chọn A



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c , mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c .

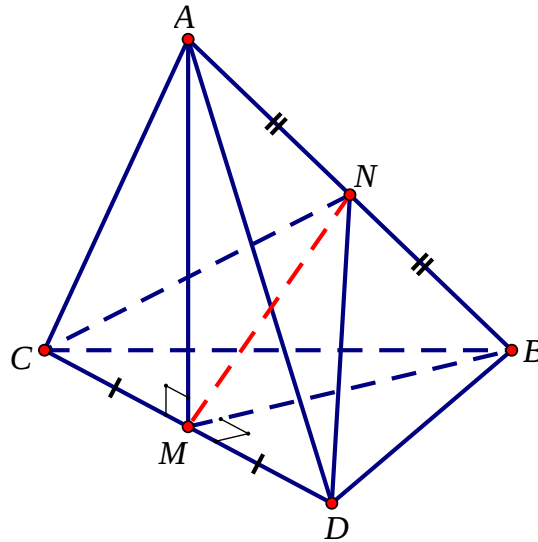
Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính giá trị của x sao cho hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD, AB .

Ta có: $AC = AD = BC = BD = a$ nên $\triangle ACD$ cân tại A , $\triangle BCD$ cân tại B , $\triangle CAB$ cân tại C , $\triangle DAB$ cân tại D . Suy ra $AM = BM$, $CN = DN$.

Góc giữa (ACD) và (BCD) là góc $AMB = 90^\circ$.

Tính: $BM = AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Xét $\triangle ABM$ vuông cân tại M có: $MN = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}}$ (1).

Góc giữa (ABC) và (ABD) là góc giữa CN và DN .

Khi đó $(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow CN \perp DN \Leftrightarrow \angle CND = 90^\circ$.

Xét $\triangle CDN$ vuông cân tại N có: $MN = \frac{CD}{2} = x$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} = x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13: Trong không gian xét $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}, \vec{q}$ là các vectơ đơn vị (có độ dài bằng 1). Gọi M là giá trị lớn nhất của biểu thức $|\vec{m} - \vec{n}|^2 + |\vec{m} - \vec{p}|^2 + |\vec{m} - \vec{q}|^2 + |\vec{n} - \vec{p}|^2 + |\vec{n} - \vec{q}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2$.

Khi đó $M - \sqrt{M}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(4; \frac{13}{2}\right)$

B. $\left(7; \frac{19}{2}\right)$

C. $(17; 22)$

D. $(10; 15)$

Lời giải

Chọn D

Đặt $S = |\vec{m} - \vec{n}|^2 + |\vec{m} - \vec{p}|^2 + |\vec{m} - \vec{q}|^2 + |\vec{n} - \vec{p}|^2 + |\vec{n} - \vec{q}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2$

Ta có $0 \leq |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}|^2 = 4 + 2(\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{m} \cdot \vec{p} + \vec{m} \cdot \vec{q} + \vec{n} \cdot \vec{p} + \vec{n} \cdot \vec{q} + \vec{p} \cdot \vec{q})$.

Từ đó suy ra $\vec{m}.\vec{n} + \vec{m}.\vec{p} + \vec{m}.\vec{q} + \vec{n}.\vec{p} + \vec{n}.\vec{q} + \vec{p}.\vec{q} \geq -2$.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác, ta có } & |\vec{m} - \vec{n}|^2 + |\vec{m} - \vec{p}|^2 + |\vec{m} - \vec{q}|^2 + |\vec{n} - \vec{p}|^2 + |\vec{n} - \vec{q}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2 \\ &= 12 - 2(\vec{m}.\vec{n} + \vec{m}.\vec{p} + \vec{m}.\vec{q} + \vec{n}.\vec{p} + \vec{n}.\vec{q} + \vec{p}.\vec{q}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |\vec{m} - \vec{n}|^2 + |\vec{m} - \vec{p}|^2 + |\vec{m} - \vec{q}|^2 + |\vec{n} - \vec{p}|^2 + |\vec{n} - \vec{q}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2 \leq 12 - 2(-2) = 16.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $\vec{m} = \vec{n} = (1; 0; 0)$ và $\vec{p} = \vec{q} = (-1; 0; 0)$.

$$\text{Vậy } M - \sqrt{M} = 16 - 4 = 12 \in (10; 15).$$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $u_n = a.3^n$ (a : hằng số). Khẳng định nào sau đây là *sai*?

A. Dãy số có $u_{n+1} = a.3^{n+1}$.

B. Hiệu số $u_{n+1} - u_n = 3.a$.

C. Với $a > 0$ thì dãy số tăng.

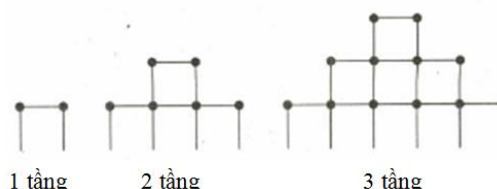
D. Với $a < 0$ thì dãy số giảm.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = a.3^{n+1} - a.3^n = a.3^n(3 - 1) = 2a.3^n.$$

Câu 15: Bạn An chơi trò chơi xếp các que diêm thành tháp theo qui tắc thể hiện như hình vẽ.



Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Để xếp được tháp có 10 tầng thì bạn An cần đúng 210 que diêm	Đ	
b)	Nếu An có 903 que diêm thì An xếp được đến tầng 22		S

Lời giải

a) Số que ở 1 tầng là $u_1 = 3$.

Tổng số que ở 2 tầng là $u_1 + u_2 = 3 + 7$.

Tổng số que ở 3 tầng là $u_1 + u_2 + u_3 = 3 + 7 + 11$.

.....

Ta có cấp số cộng $u_1 = 3$, $d = 4$, tính S_{10} ?

Để cần có 10 tầng cần tổng $S_{10} = \frac{10}{2}(2.3 + 9.4) = 210$ que.

b) Ta có $S_n = \frac{n}{2}(2.3 + (n-1).4) = 903 \Rightarrow n = 21$ (tầng)

Câu 16: Giả sử có 3 cơ sở khoan giếng A, B và C với các quy định về giá như sau:

- **Cơ sở A:** Giá 1 mét khoan đầu tiên là 7000 đồng. Mỗi mét tiếp theo tăng thêm 400 đồng so với mét khoan ngay trước đó.
 - **Cơ sở B:** Giá 1 mét khoan đầu tiên là 6000 đồng. Mỗi mét tiếp theo tăng thêm 5% so với mét khoan ngay trước đó.
 - **Cơ sở C:** Giá 1 mét khoan đầu tiên là 5500 đồng. Mỗi mét tiếp theo tăng thêm 200 đồng cho các mét từ 1 đến 10 mét, và 8% cho các mét tiếp theo so với giá của mét ngay trước đó.
- Câu hỏi: Với độ sâu giếng cần khoan là 15 mét và 30 mét, công ty nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí. (Giả thiết chất lượng và thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau)

A. luôn chọn A.

B. giếng 15 chọn A còn giếng 30 chọn B.

C. giếng 15 chọn B còn giếng 30 chọn C.

D. giếng 15 chọn C còn giếng 30 chọn A.

Lời giải

Chọn D

✚ Cơ sở A giá mét khoan đầu tiên là 7000 và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 400 so với giá của mét khoan ngay trước đó.

Tổng chi phí $S_{A,15}$ và $S_{A,30}$ là tổng của cấp số cộng với $u_1 = 7000, d = 400$

$$+ \text{ Nếu đào giếng 15 hết số tiền là: } S_{A,15} = \frac{15}{2} [2.7000 + (15-1).400] = 147000 .$$

$$+ \text{ Nếu đào giếng 30 hết số tiền là: } S_{A,30} = \frac{30}{2} [2.7000 + (30-1).400] = 384000 .$$

✚ Cơ sở B Giá của mét khoan đầu tiên là 6000 và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 5% giá của mét khoan ngay trước đó.

Tổng chi phí $S_{B,15}$ và $S_{B,30}$ là tổng của cấp số nhân với $u_1 = 6000, q = 1,05$

$$+ \text{ Nếu đào giếng 15 hết số tiền là: } S_{B,15} = 6000 \cdot \frac{1 - (1,05)^{15}}{1 - 1,05} \approx 129471 .$$

$$+ \text{ Nếu đào giếng 30 hết số tiền là: } S_{B,30} = 6000 \cdot \frac{1 - (1,05)^{30}}{1 - 1,05} \approx 389633 .$$

✚ Cơ sở C giá 1 mét khoan đầu tiên là 5500 đồng. Mỗi mét tiếp theo tăng thêm 200 đồng cho các mét từ 1 đến 10 mét, và 8% cho các mét tiếp theo so với giá của mét ngay trước đó.

✓ **Giếng 15 mét:**

Chi phí cho 10 mét đầu tiên:

Tổng chi phí $S_{C,10}$ cho 10 mét đầu theo cấp số cộng với $u_1 = 5500, d = 200$

$$S_{C,10} = \frac{10}{2} [2.5500 + (10-1).200] = 64000.$$

Chi phí cho mét thứ 10: $u_{10} = 5500 + 9.200 = 7300$

Chi phí cho 5 mét tiếp theo:

Từ mét thứ 11 trở đi, chi phí được tăng theo cấp số nhân với công bội $q = 1,08$

Chi phí cho mét thứ 11: $u_{11} = 7300.1,08 = 7884$

Suy ra $S_{C,11 \rightarrow 15} = 7884 \cdot \frac{1-1,08^5}{1-1,08} = 46252$

Vậy tổng chi phí giếng 15 mét: $S_{C,15} = 64000 + 46252 = 110252$

✓ **Giếng 30 mét:**

Giải tương tự như giếng 15 mét: $S_{C,30} = S_{C,10} + S_{C,11 \rightarrow 30} = 64000 + 7884 \cdot \frac{1-1,08^{20}}{1-1,08} = 424787$

Ta thấy $S_{C,15} < S_{B,15} < S_{A,15}$ nên giếng 15 chọn C và $S_{A,30} < S_{B,30} < S_{C,30}$ nên giếng 30 chọn A

Câu 17: Kết quả đúng của $\lim \frac{2-5^{n-2}}{3^n + 2.5^n}$ là:

A. $-\frac{5}{2}$.

B. $-\frac{1}{50}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim \frac{2-5^{n-2}}{3^n + 2.5^n} = \lim \frac{\frac{2}{5^n} - \frac{1}{25}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2} = \frac{0 - \frac{1}{25}}{0 + 2} = -\frac{1}{50}.$$

Câu 18: Hệ số của x^7 trong khai triển $(2-3x)^{15}$ là

A. $-C_{15}^7 \cdot 2^8 \cdot 3^7$.

B. C_{15}^8 .

C. $C_{15}^8 \cdot 2^8$.

D. $-C_{15}^8 \cdot 2^8 \cdot 3^7$.

Lời giải

Chọn A

$$(2-3x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot 2^{15-k} \cdot (-3x)^k.$$

Hệ số của x^7 tương ứng với $k=7$. Vậy hệ số của x^7 là $C_{15}^7 \cdot 2^8 \cdot (-3)^7 = -C_{15}^7 \cdot 2^8 \cdot 3^7$.

Câu 19: Có 3 nam (A,C,E) và 3 nữ (B,D,F) cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao

Kéo các ô sau thả vào vị trí thích hợp để được khẳng định đúng:

40

48

32

24

72

1) Có cách xếp sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ

2) Có cách xếp sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam A, một người nữ B phải ngồi kề nhau

3) Có cách xếp sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam C, một người nữ D không được ngồi kề nhau?

Lời giải

1) Có 6 cách chọn một người tùy ý ngồi vào chỗ thứ nhất. Tiếp đến, có 3 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 2. Lại có 2 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 3, có 2 cách chọn vào chỗ thứ 4, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 5, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 6.

Vậy có: $6.3.2.2.1.1 = 72$ cách.

2) Cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ nhất và chỗ thứ hai, có 2 cách. Tiếp đến, chỗ thứ ba có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

Bây giờ, cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ hai và chỗ thứ ba. Khi đó, chỗ thứ nhất có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn. Tương tự khi cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ ba và thứ tư, thứ tư và thứ năm, thứ năm và thứ sáu.

Vậy có: $5.2.2.2.1.1 = 40$ cách.

3) Số cách chọn để cặp nam nữ đó không ngồi kề nhau bằng số cách chọn tùy ý trừ số cách chọn để cặp nam nữ đó ngồi kề nhau.

Vậy có: $72 - 40 = 32$ cách

Câu 20: Cho một đa giác (H) có 60 đỉnh nội tiếp một đường tròn (O) . Người ta lập một tứ giác tùy ý có bốn đỉnh là các đỉnh của (H) . Xác suất để lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H) gần với số nào nhất trong các số sau?

A. 85,40%.

B. 13,45%.

C. 40,35%.

D. 80,70%.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{60}^4$.

Gọi E là biến cố "lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H) ".

Để chọn ra một tứ giác thỏa mãn đề bài ta làm như sau:

Bước 1: Chọn đỉnh đầu tiên của tứ giác, có 60 cách.

Bước 2: Chọn 3 đỉnh còn lại sao cho hai đỉnh bất kỳ của tứ giác cách nhau ít nhất 1 đỉnh. Điều này tương đương với việc ta phải chia $m = 60$ chiếc kẹo cho $n = 4$ đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ

có ít nhất $k=2$ cái, có $C_{m-n(k-1)-1}^{n-1} = C_{55}^3$ cách, nhưng làm như thế mỗi tứ giác lặp lại 4 lần.

$$\Rightarrow \text{Số phần tử của biến cố } E \text{ là: } n(E) = \frac{60.C_{55}^3}{4}.$$

$$\text{Xác suất của biến cố } E \text{ là: } P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{60.C_{55}^3}{4.C_{60}^4} \approx 80,7\%.$$

Câu 21: Giả sử có 9 viên kẹo khác màu và 3 cái túi, ta chia đều kẹo vào các túi:
Kéo các ô sau thả vào vị trí thích hợp để được khẳng định đúng:

280

504

1680

120

362880

1) Số cách xếp 9 viên kẹo vào 3 cái túi khác nhau là

2) Số cách xếp 9 viên kẹo vào 3 cái túi giống nhau là

Lời giải

1) Xếp 9 viên kẹo vào 3 túi khác nhau:

Xếp 3 viên kẹo vào túi số 1: $C_9^3 = 84$

Xếp 3 viên kẹo vào túi số 2: $C_6^3 = 20$

Xếp 3 viên kẹo vào túi số 3: $C_3^3 = 1$

Số cách xếp 9 viên kẹo vào 3 túi khác nhau: $84.20 = 1680$

2) Số cách xếp 9 viên kẹo vào 3 túi giống nhau là $\frac{1680}{3!} = 280$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng:

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$

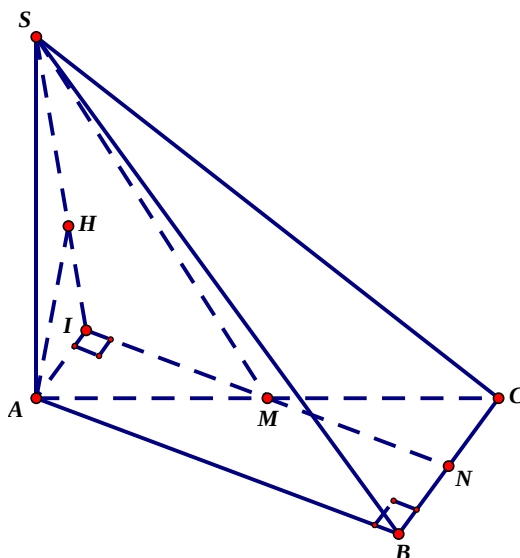
B. $\frac{2a}{\sqrt{13}}$

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{13}$

D. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm cạnh BC suy ra $AB \parallel (SMN)$.

Khi đó, $d(AB, SM) = d(AB, (SMN)) = d(A, (SMN))$.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $AI \perp MN$ suy ra $(SAI) \perp (SMN) = SI$.

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AH \perp SI$ suy ra $AH \perp (SMN)$.

Suy ra $d(AB, SM) = AH$.

Ta có $AI = BN = a$.

$$\text{Lại có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{12a^2} = \frac{13}{12a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, SM) = AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45° . Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

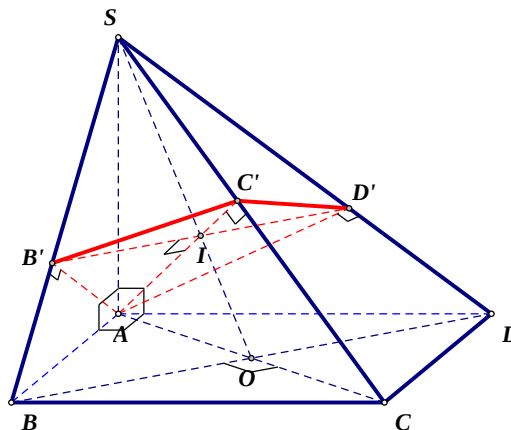
B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Để thấy $SBA = 45^\circ$. Ta có $B'D' \perp SC$ và $BD \perp SC$ và SC không vuông góc với mặt phẳng (SBD) , suy ra $BD \parallel B'D'$. Nên từ $I = SO \cap AC'$ nên từ I kẻ $B'D' \parallel BD$ cắt SB, SD lần lượt tại B', D' .

Từ trên suy ra $B'D' \perp AC'$ và $\begin{cases} AB' \perp SC \\ AB' \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SB$.

$$\text{Suy ra } S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} AC' \cdot B'D'. \text{ Mà } AC' = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ và } \frac{B'D'}{BD} = \frac{SB'}{SB} = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'D' = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} AC' \cdot B'D' = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2.$$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$, biết $\tan \alpha = \sqrt{2}$

Kéo các ô sau thả vào vị trí thích hợp để được khẳng định đúng:

2a

60°

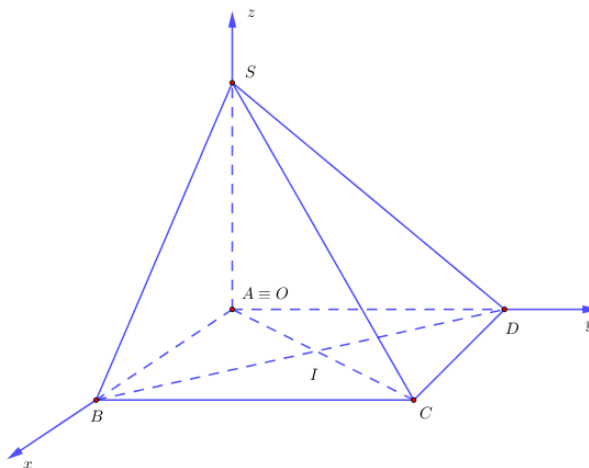
$a\sqrt{2}$

30°

a

- 1) Độ dài cạnh SA bằng
- 2) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

Lời giải



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (SI; AI) = SIA.$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \tan SIA = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó $\overrightarrow{SA} = (0;0;-a)$; $\overrightarrow{SC} = (a;a;-a)$; $\overrightarrow{SB} = (a;0;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (-1;1;0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1;0;1)$.

$$\text{Suy ra } \cos((SAC); (SBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((SAC); (SBC)) = 60^\circ.$$

Câu 25: Một số Armstrong (hay còn gọi là số Narcissistic) là một số nguyên n có k chữ số, bằng tổng các lũy thừa k của các chữ số của nó, ví dụ: $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$. Hãy kiểm tra tính đúng đắn của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	9474 là một số Armstrong.	D	
b)	Tổng của các số Armstrong có ba chữ số là 1301.	D	
c)	Nếu n là một số Armstrong có k chữ số, thì chữ số đầu tiên của n luôn nhỏ hơn hoặc bằng chữ số cuối cùng của n .		S

Lời giải

☉ Xét mệnh đề 1:

- Xét $n = 9474$, có 4 chữ số
- Ta tính: $9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$
- **Kết luận:** Mệnh đề **đúng**.

☉ Xét mệnh đề 2:

- Các số Armstrong có ba chữ số là 153, 370, 371, và 407.
- Tổng của chúng: $153 + 370 + 371 + 407 = 1301$
- **Kết luận:** Mệnh đề **đúng**.

☉ Xét mệnh đề 3:

- Dựa vào kết quả mệnh đề 2, kết luận mệnh đề 3 sai.

Câu 26: Kéo các ô sau thả vào vị trí thích hợp để được khẳng định đúng:



1) Số dư khi chia $2497^{12} + 4521^7 - 1$ cho 8 là

2) Số dư khi chia $1523^4 + 407^3 - 786^2$ cho 5 là

Lời giải

Phương pháp:

Nếu $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

1. Ta có $2497 = 8 \cdot 312 + 1 \Rightarrow 2497 \equiv 1 \pmod{8}$

Do đó $2497^{12} \equiv 1^{12} \equiv 1 \pmod{8}$.

Ta có $4521 = 8 \cdot 565 + 1 \Rightarrow 4521 \equiv 1 \pmod{8}$

Do đó $4521^7 \equiv 1^7 \equiv 1 \pmod{8}$.

Suy ra $2497^{12} + 4521^7 - 1 \equiv 1 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod{8}$

2. $1523 = 5 \cdot 304 + 3 \Rightarrow 1523 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 1523^4 \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{5}$

$407 = 5 \cdot 81 + 2 \Rightarrow 407 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 407^3 \equiv 2^3 \equiv 3 \pmod{5}$

$786 = 5 \cdot 157 + 1 \Rightarrow 786 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 786^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{5}$

Vậy $1523^4 + 407^3 - 786^2 \equiv 1 + 3 - 1 \equiv 3 \pmod{5}$

Câu 27: Trong bốn hàm số: (1) $y = \cos 2x$, (2) $y = \sin x$; (3) $y = \tan 2x$; (4) $y = \cot 4x$ có mấy hàm số tuần hoàn với chu kỳ π ?

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên hàm số (1) $y = \cos 2x$ tuần hoàn chu kỳ π .
Hàm số (2) $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Do hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số (3) $y = \tan 2x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{2}$.

Do hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số (4) $y = \cot 4x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{4}$.

Câu 28: Anh Bình là một nhà nghiên cứu về sự phát triển của một thành phố. Anh ta xây dựng mô hình dân số $P(t)$ (nghìn người) của thành phố này sau t năm kể từ thời điểm hiện tại như sau:

$$P(t) = \frac{50t^3 + 100t}{t^4 + 20t^2 + 100} + \frac{60t^2 + 30}{t^2 + 5t + 10} + 80 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 150$$

Anh Bình muốn biết dân số của thành phố trong dài hạn thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** (130;290). **B.** (60;290). **C.** (60;130). **D.** (130;210).

Lời giải

Để giải quyết bài toán này, bạn cần phân tích và tìm giới hạn của từng phần trong hàm $P(t)$ khi $t \rightarrow +\infty$

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t^3 + 100t}{t^4 + 20t^2 + 100} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{50}{t} + \frac{100}{t^3}}{1 + \frac{20}{t^2} + \frac{100}{t^4}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60t^2 + 30}{t^2 + 5t + 10} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60 + \frac{30}{t^2}}{1 + \frac{5}{t} + \frac{10}{t^2}} = 60 \text{ và } -80 \leq 80 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \leq 80$$

Vậy dân số của thành phố trong dài hạn thuộc khoảng $(60 - 80 + 150; 60 + 80 + 150) = (130; 290)$

Câu 29: Cho tam giác ABC vuông tại A có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q . Tìm q ?

- A.** $q = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. **B.** $q = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2}$. **C.** $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. **D.** $q = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Theo giả thiết ta có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q nên $BC = q^2 \cdot AC$ và $AB = q \cdot AC$.

$$\text{Do đó } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow q^4 \cdot AC^2 = q^2 \cdot AC^2 + AC^2 \Leftrightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ q^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } q > 0 \text{ nên } q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Câu 30: Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc khoảng $(0;100\pi)$ của phương trình $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3$. Tổng các phần tử của S là

A. $\frac{7400\pi}{3}$. B. $\frac{7525\pi}{3}$. C. $\frac{7375\pi}{3}$. D. $\frac{7550\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Theo đề bài cho ta có } 0 < x < 100\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k2\pi < 100\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{599}{12}$$

$$\text{Mà } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4; \dots; 48; 49\}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi + \frac{\pi}{6} + 2 \times 2\pi + \dots + \frac{\pi}{6} + 49 \times 2\pi = \frac{50\pi}{6} + 2\pi(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49) \\ &= \frac{50\pi}{6} + 2\pi \frac{49(49+1)}{2} = \frac{7375\pi}{3}. \end{aligned}$$

Câu 31: Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0;3\pi)$ là

A. 2. **B. 3.** C. 4. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Trên } (0;3\pi) \Rightarrow x = \frac{7\pi}{8}, x = \frac{15\pi}{8}, x = \frac{23\pi}{8}.$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = (3x^2 - 2x - 1)^9$. Tính đạo hàm cấp 6 của hàm số tại điểm $x=0$.

A. $f^{(6)}(0) = -60480$. B. $f^{(6)}(0) = -34560$. C. $f^{(6)}(0) = 60480$. D. $f^{(6)}(0) = 34560$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Giả sử } f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{18}x^{18}.$$

$$\text{Khi đó } f^{(6)}(x) = 6!a_6 + b_7x + b_8x^2 + \dots + b_{18}x^{12} \Rightarrow f^{(6)}(0) = 720a_6.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (3x^2 - 2x - 1)^9 &= -(1 + 2x - 3x^2)^9 = -\sum_{k=0}^9 C_9^k (2x - 3x^2)^k \\ &= -\sum_{k=0}^9 C_9^k \sum_{i=0}^k C_k^i (2x)^{k-i} (-3x^2)^i = -\sum_{k=0}^9 \sum_{i=0}^k C_9^k C_k^i 2^{k-i} (-3)^i x^{k+i}. \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^6 ứng với k, i thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 9 \\ k + i = 6 \end{cases}$

$$\Rightarrow (k; i) \in \{(6; 0), (5; 1), (4; 2), (3; 3)\}$$

$$\Rightarrow a_6 = -\left[C_9^6 C_6^0 2^6 (-3)^0 + C_9^5 C_5^1 2^4 (-3)^1 + C_9^4 C_4^2 2^2 (-3)^2 + C_9^3 C_3^3 2^0 (-3)^3 \right] = -84$$

$$\Rightarrow f^{(6)}(0) = 720 \cdot (-64) = -60480.$$

Câu 33: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^4 - 8t^2 + 16, t \geq 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm vận tốc $v(t) = 4t^3 - 16t$, gia tốc $a(t) = 12t^2 - 16$	D	
b)	Hạt chuyển động xuống dưới khi $t \in (0; 4)$		S
c)	Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 4$ là $128m$		S
d)	Khi $t = 1$ thì hạt giảm tốc độ	D	

Lời giải

a) Hàm vận tốc là: $v(t) = y' = 4t^3 - 16t, t \geq 0$

Hàm gia tốc là: $a(t) = v'(t) = 12t^2 - 16, t \geq 0$

b) Hạt chuyển động xuống dưới khi $v(t) = y' = 4t^3 - 16t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 2$ (do $t \geq 0$)

Hạt chuyển động lên trên khi $v(t) = y' = 4t^3 - 16t > 0 \Leftrightarrow t > 2$ (do $t \geq 0$)

c) Ta có:

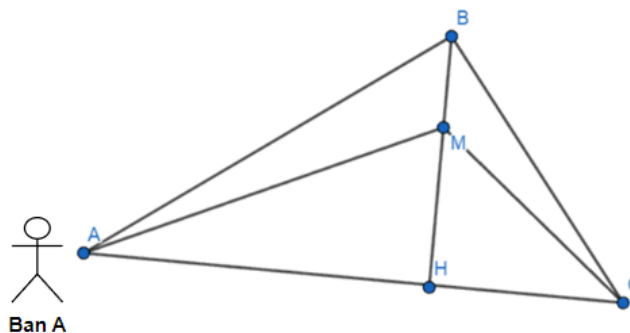
Ta đã tìm được rằng hạt chuyển động xuống dưới từ $0 < t < 2$ và sau đó chuyển động lên trên từ $t > 2$

Vậy quãng đường vật đi được trong thời gian $0 \leq t \leq 4$ là:

$$S = |y(2) - y(0)| + |y(4) - y(2)| = 160 \text{ mét}$$

d) Hạt giảm tốc khi $v(t)$ giảm hay $a(t) < 0 \Leftrightarrow 12t^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 34: Nhà của các bạn A, B, C nằm ở ba vị trí tạo thành một tam giác ABC (như hình vẽ). Biết rằng $AC = 20\text{km}$, $BC = 10\sqrt{2}\text{km}$. Bạn E hẹn chờ bạn A tại một vị trí M nằm trên đoạn đường BH với H là hình chiếu vuông góc của B lên AC , biết $HM = 4\text{ km}$. Giả sử bạn A di chuyển từ nhà đến điểm hẹn M với vận tốc 36 km/h và từ M hai bạn A, E đi đến nhà bạn C với vận tốc 36 km/h . Sau đó, ba bạn A, E, C tiếp tục đi từ nhà bạn C đến nhà bạn B với vận tốc 50 km/h . Hỏi BM bằng bao nhiêu để thời gian mà bạn A đi từ nhà đến nhà bạn B là nhanh nhất?



Đáp án:

Lời giải

Đặt $AH = x, HC = AC - x = 20 - x, 0 < x \leq 20$

Thời gian di chuyển của A đến M

$$\text{Ta có } AM = \sqrt{x^2 + 16} \Rightarrow T_{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{36} \text{ (giờ)}$$

Thời gian di chuyển của M đến C

$$\text{Ta có } MC = \sqrt{(20 - x)^2 + 16} \Rightarrow T_{MC} = \frac{\sqrt{(20 - x)^2 + 16}}{36} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Thời gian di chuyển của C đến B: } T_{CB} = \frac{10\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{5} \text{ (giờ)}$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{36} + \frac{\sqrt{(20 - x)^2 + 16}}{36} + \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \min T(x) = T(10) = \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{29}}{9}$$

$$\text{Suy ra } HC = 10 \Rightarrow BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = 10 \Rightarrow BM = 10 - 4 = 6 \text{ km}$$

Câu 35: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(m; n)$ với $m \geq n \geq 0$ sao cho $(m + 2n)^3$ là ước của $9n(m^2 + mn + n^2) + 16$.

Đáp án:

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 9n(m^2 + mn + n^2) + 16 - (m + 2n)^3 = 16 - (m - n)^3$$

$$\text{Mặt khác: } B = (m + 2n)^3 = (m - n + 3n)^3 = (m - n)^3 + 9(m - n)^2 n + 27(m - n)n^2 + 27n^3 > 0$$

Mà theo bài toán ta có A bội của B. Để ý rằng với $A \neq 0$ với mọi m, n , nên ta suy ra được $|A| \geq |B|$

$$\text{Xét } m - n > 2, \text{ khi đó } m - n \geq 3 \text{ nên } |A| = (m - n)^3 - 16$$

$$\text{Từ đó ta được } (m - n)^3 - 16 \geq (m - n)^3 + 9(m - n)^2 n + 27(m - n)n^2 + 27n^3$$

$$\Leftrightarrow -16 \geq 9(m - n)^2 n + 27(m - n)n^2 + 27n^3 \text{ (VT} < 0, \text{VP} > 0, \text{ vô lý)}$$

Xét $m - n \leq 2$ nên $|A| = 16 - (m - n)^3$

Từ đó ta được $16 - (m - n)^3 \geq (m - n)^3 + 9(m - n)^2 n + 27(m - n)n^2 + 27n^3$

$$\Leftrightarrow (m + 2n)^3 \leq 16 - (m - n)^3 = 8 \Leftrightarrow m + 2n \leq 2$$

Kết hợp với $m - n \leq 2$ ta giải ra được $(m; n) = (2; 0), (1; 0)$

Câu 36: Một vật chuyển động với quãng đường có phương trình là $s(t) = -t^4 + 8t^3 - 18t^2 + 20t$, trong đó t là thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(t)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian t . Trong khoảng thời gian t từ 0 đến 6 giây, vận tốc cực đại của vật là $v_{\max}$ và gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc đạt cực đại là $a_{v\max}$. Tính $v_{\max} + a_{v\max}$

Đáp án:

Lời giải

Vận tốc của vật là đạo hàm của quãng đường $s(t)$ theo thời gian t :

$$v(t) = s'(t) = -4t^3 + 24t^2 - 36t + 20$$

$$\text{Ta có: } v'(t) = -12t^2 + 48t - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } v_{\max} = v(3) = 20$$

Ta có gia tốc của vật là đạo hàm của vận tốc $v(t)$ theo thời gian t :

$$a(t) = v'(t) = -12t^2 + 48t - 36 \Rightarrow a_{v\max} = a(3) = 0$$

$$\text{Vậy } v_{\max} + a_{v\max} = 20$$

Câu 37: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$. Giá trị của n để $-u_n + 2017n + 2018 = 0$ là

Đáp án:

Lời giải

$$\text{Với } n = 1 \text{ ta có: } u_2 = u_1 + 3 = 4 = 2^2.$$

$$\text{Với } n = 2 \text{ ta có: } u_3 = u_2 + 2.2 + 1 = 9 = 3^2.$$

$$\text{Với } n = 3 \text{ ta có: } u_4 = u_3 + 2.3 + 1 = 16 = 4^2.$$

$$\text{Từ đó ta có: } u_n = n^2.$$

$$\text{Suy ra } -u_n + 2017n + 2018 = 0 \Leftrightarrow -n^2 + 2017n + 2018 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1(L) \\ n = 2018(N) \end{cases}$$

Câu 38: Tập hợp tất cả giá trị của $m \in (a; b]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 1}}{x + 2}$ có ba tiệm cận. Tính $a + b$.

Đáp án:

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 1}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{m}.$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 1}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -\sqrt{m}.$

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang thì $m > 0$.

Khi $x = -2 \Rightarrow \sqrt{mx^2 + 3mx + 1} = \sqrt{1 - 2m}.$

Với $m < \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1 - 2m} > 0$ thì đồ thị hàm số sẽ có tiệm đứng là $x = -2$.

Với $m = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1 - 2m} = 0$, ta phải thử với trường hợp $m = \frac{1}{2}.$

$$m = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1}}{x + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x+1)(x+2)}}{x + 2}.$$

Lúc đó ta chỉ được xét giới hạn khi $x \rightarrow -2^-$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(-\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \right) = -\infty.$$

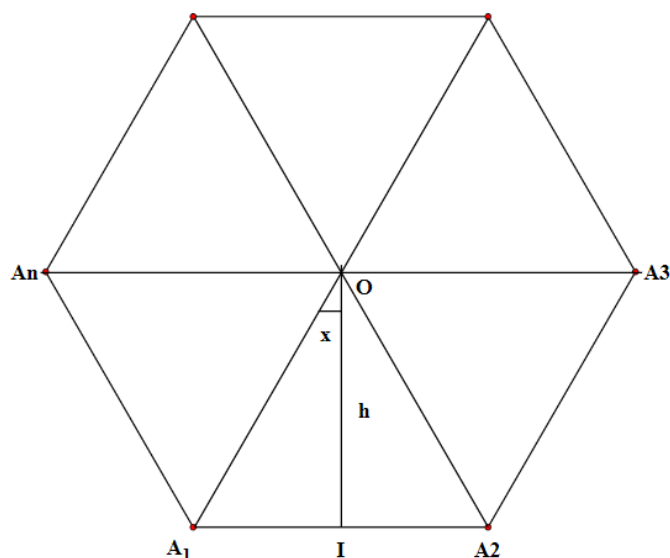
Từ đó với $m = \frac{1}{2}$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$.

Do đó đồ thị hàm số có ba tiệm cận $\Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}.$

Câu 39: Tính thể tích (đơn vị thể tích) của hình chóp có đáy là một đa giác đều sao cho số cạnh của đáy là lớn nhất, khi tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng 1 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Đáp án:

Lời giải

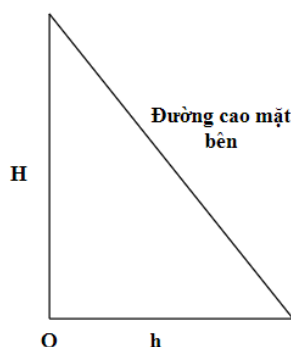


Đáy của hình chóp là một đa giác đều có n cạnh. Tất cả các cạnh của hình chóp, bao gồm cả các cạnh đáy và các cạnh bên, đều có độ dài bằng 1.

Đáy của hình chóp có thể được chia thành n tam giác đều, với mỗi góc ở tâm là $x = \frac{\pi}{n}$

$$\text{Ta có } \tan x = \frac{1}{h} \Rightarrow h = \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Chiều cao H của hình chóp được tính bằng cách sử dụng định lý Pythagoras:



$$H^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - h^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Để đảm bảo H là số thực dương thì điều kiện cần là: $\frac{3}{4} - \frac{1}{4 \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} > 0, \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow n_{\max} = 5$

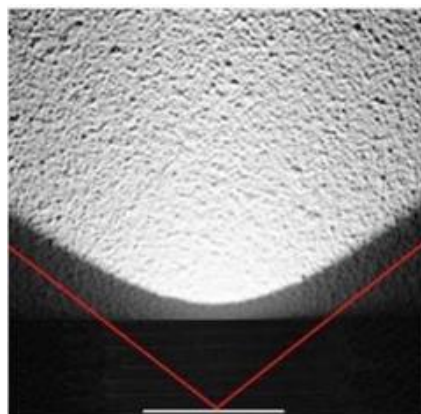
Diện tích đáy của hình chóp là tổng diện tích của n tam giác đều

$$\Rightarrow S = n \times \frac{1}{2} \times h \times 1 = \frac{n}{2} \times \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \times S \times H = \frac{1}{3} \times \frac{n}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \times \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4 \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}} \text{ với } n=5$$

Suy $V \approx 0,3$ (đơn vị thể tích)

Câu 40: Biết rằng vùng sáng của một đèn bảo vệ trên biển nằm trong phần lõm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{ax^2 + k^2} + b$ (C), với $a > 0$ (a, k, b là các hệ số điều chỉnh đèn). Trên mô hình tọa độ phẳng, người ta xác định được một tiếp cận xiên của đồ thị là đường thẳng $y = x - 2$ (tham khảo hình vẽ).



- Điều chỉnh các giá trị của a và b để vùng sáng của một đèn bảo vệ trên biển nằm trong phần lõm của đồ thị (C) và có một đường tiệm cận xiên $y = x - 2$. Tính $a + b$
- Đồ thị (C) có một đường tiệm cận xiên khác là $y = mx + n$. Tính $m + n$
- Người ta đặt chân đèn tại giao điểm của hai đường tiệm cận xiên, và điều chỉnh k để đèn chiếu xa hơn bán kính $300m$ kể từ chân đèn. Để ước lượng độ dài giữa hai điểm A và B trên đồ thị (C) cách chân đèn $300m$, người ta tính khoảng cách giữa hai điểm trên hai tiệm cận xiên cùng cách chân đèn $300m$. Độ dài ước lượng bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị).

- Xét hàm số $y = \sqrt{ax^2 + k^2} + b, a > 0$, có TXĐ: $D = R$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + k^2} + b}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a + \frac{k^2}{x^2}} + \frac{b}{x}}{1} = \sqrt{a}$$

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{a}x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + k^2} + b - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + k^2 - (b - x)^2}{\sqrt{x^2 + k^2} - (b - x)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-b^2 + 2bx + k^2}{\sqrt{x^2 + k^2} - (b - x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2b + \frac{k^2 - b^2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{x^2}} + 1 - \frac{b}{x}} \right) = b$$

Từ giả thiết ta được $b = -2$. Vậy $a + b = -1$.

2. Ta được hàm số đã cho từ ý 1: $y = \sqrt{x^2 + k^2} - 2$

Tương tự tính cách giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$, ta được một tiệm cận xiên nữa là $y = -x - 2$

Suy ra $m + n = -3$

3. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận xiên suy ra $I(0; -2)$ là vị trí đặt chân đèn. MN là độ dài ước lượng cho AB .

Dễ thấy IMN là tam giác vuông cân nên $MN = \sqrt{2}IM = 300\sqrt{2} \approx 424m$