ĐÁP ÁN BÀI TẬP
ĐỀ THI THỬ PHẦN TOÁN TRẮC NGHIỆM & TỰ LUẬN

PAT-C (HUST) Tổng ôn toàn diện

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ tâm I và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+24=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M .

A. $M(-1;0;4)$. B. $M(0;1;2)$. <u>C</u>. $M(3;4;2)$. D. $M(4;1;2)$.

Ta có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$. Do $d(I;(P))=9>R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) . Do H là hình chiếu của I lên (P) và MH lớn nhất nên M là giao điểm của đường thẳng IH với mặt cầu (S) .

Đường thẳng IH nhận $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;2;-1)$ làm vecto chỉ phương.

Phương trình đường thẳng IH là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=3-t \end{cases}$.

Giao điểm của IH với (S) . $9t^2=9 \Leftrightarrow t=\pm 1 \Rightarrow M_1(3;4;2)$ và $M_2(-1;0;4)$.

$M_1H=d(M_1;(P))=12$; $M_2H=d(M_2;(P))=6$.

Vậy điểm cần tìm là $M(3;4;2)$.

2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-my+z+6m+3=0$ và $(\beta): mx+y-mz+3m-8=0$; hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng Oxy . Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng Oxy . Tính giá trị biểu thức $P=10a^2-b^2+3c^2$.

A. $P=56$. B. $P=9$. <u>C</u>. $P=41$. D. $P=73$.

Mặt phẳng $(\alpha): x-my+z+6m+3=0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;-m;1)$, và mặt phẳng $(\beta): mx+y-mz+3m-8=0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(m;1;-m)$.

Ta có: $M\left(-3m+\dfrac{4}{m}-3;0;-3m-\dfrac{4}{m}\right)\in\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$

Δ có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=\left(m^2-1;2m;m^2+1\right)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) . Khi đó (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{u};\vec{k}\right]=\left(2m;1-m^2;0\right)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là : $2mx+\left(1-m^2\right)y+6m^2+6m-8=0$.

Vì $I(a;b;c)\in(Oxy)$ nên $I(a;b;0)$.

Theo giả thiết ta suy ra (P) là tiếp diện của mặt cầu $(S) \Rightarrow d(I;(P))=R$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2ma+\left(1-m^2\right)b+6m^2+6m-8\right|}{\sqrt{4m^2+\left(1-m^2\right)^2}}=R>0 \Leftrightarrow \frac{\left|2m(a+3)+(6-b)m^2+b-8\right|}{m^2+1}=R>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m(a+3)+(6-b)m^2+b-8=R\left(m^2+1\right) \\ 2m(a+3)+(6-b)m^2+b-8=-R\left(m^2+1\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2(a+3)=0 \\ 6-b=R \\ b-8=R \\ R>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2(a+3)=0 \\ 6-b=-R \\ b-8=-R \\ R>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-3 \\ 6-b=b-8 \\ R=6-b>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3=0 \\ 6-b=b-8 \\ -R=6-b<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=7 \end{cases} .$$

Vậy $I(-3;7;0)$, do đó $P=10a^2-b^2+3c^2=41$.

3. Cho $\log_a b=\sqrt{2}$. Giá trị của $M=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ là:

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C. $1-\sqrt{2}$. D. $1+\sqrt{2}$.

Từ $\log_a b=\sqrt{2}\Leftrightarrow b=a^{\sqrt{2}}$ thay vào ta được:

$$M=\log_{\frac{\sqrt{a^{\sqrt{2}}}}{a}}\sqrt{\frac{a^{\sqrt{2}}}{a}}=\log_{a^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}}a^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Một người mua một căn hộ chung cư với giá 500 triệu đồng. Người đó trả trước số tiền là 100 triệu đồng. Số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ là $0,5$ mỗi tháng. Kể từ ngày mua, sau đúng mỗi tháng người đó trả số tiền cố định là 4 triệu đồng. Thời gian để người đó trả hết nợ là

A. 136 tháng. B. 140 tháng. **C**. 139 tháng. D. 133 tháng.

Tổng số tiền người đó còn nợ là $A_0=400$ triệu đồng.

Số tiền người đó còn nợ hết tháng thứ nhất là: $A_1=A_0+0,5$.

Số tiền người đó còn nợ hết tháng thứ hai là: $A_2=A_1+0,5$

$=1,005\left(1,005A_0-4\right)-4=\left(1,005\right)^2A_0-4\left(1,005+1\right)$.

Số tiền người đó còn nợ hết tháng thứ ba là: $A_3=A_2+0,5$

$=1,005\left[\left(1,005\right)^2A_0-4\left(1,005+1\right)\right]-4=\left(1,005\right)^3A_0-4\left[\left(1,005\right)^2+1,005+1\right]$.

...

Số tiền người đó còn nợ hết tháng thứ n là:

$A_n=\left(1,005\right)^nA_0-4\left[\left(1,005\right)^{n-1}+\left(1,005\right)^{n-2}+\ldots+1\right]$.

Ta có: $1+1,005+\left(1,005\right)^2+\ldots+\left(1,005\right)^{n-2}+\left(1,005\right)^{n-1}$ là tổng n số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=1$ và $q=1,005$. Do đó: $S_n=\dfrac{1\left[1-\left(1,005\right)^n\right]}{1-1,005}=200\left[\left(1,005\right)^n-1\right]$.

Người đó trả hết nợ khi $A_n=0\Rightarrow\left(1,005\right)^nA_0-800\left[\left(1,005\right)^n-1\right]=0$

$\Leftrightarrow 400.\left(1,005\right)^n=800\Leftrightarrow\left(1,005\right)^n=2\Leftrightarrow n=\log_{1,005}2\approx 138,98$ (tháng).

Vậy người đó trả hết nợ sau 139 tháng.

5. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\left(t\right)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t$ $\left(\mathrm{m/s}\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng:

A. 20 $\left(\mathrm{m/s}\right)$. B. 16 $\left(\mathrm{m/s}\right)$. C. 13 $\left(\mathrm{m/s}\right)$. **D**. 15 $\left(\mathrm{m/s}\right)$.

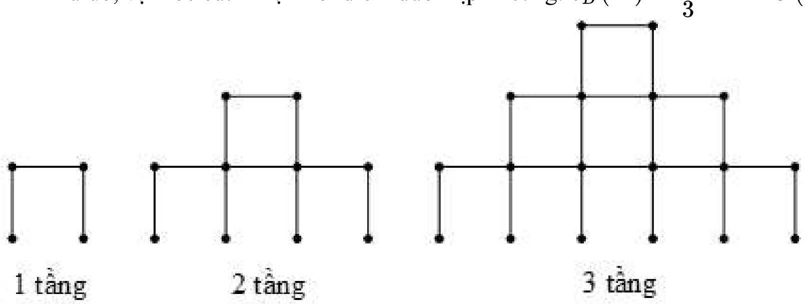
+) Từ đề bài, ta suy ra. tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 12 giây.

+) Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B\left(t\right)=\int adt=at+C$, lại có $v_B\left(0\right)=0$ nên $v_B\left(t\right)=at$.

+) Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)dt=\int_0^{12}atdt\Leftrightarrow 96=72a\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng: $v_B\left(12\right)=\dfrac{4}{3}.12=16$ $\left(m/s\right)$.



6. Bạn An chơi trò chơi xếp các que diêm thành tháp theo qui tắc thể hiện như hình vẽ.

10

Để xếp được tháp có tầng thì bạn An cần đúng bao nhiêu que diêm?

A. 210 . B. 39 . C. 100 . D. 270 .

Số que ở 1 tầng là $u_1 = 3$.

Tổng số que ở 2 tầng là $u_1 + u_2 = 3 + 7 = 3 + (3 + 1.4)$.

Tổng số que ở 3 tầng là $u_1 + u_2 + u_3 = 3 + 7 + 11 = 3 + (3 + 1.4) + (3 + 2.4)$.

…

Tổng số que ở 10 tầng là $S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{10} = 3 + (3 + 1.4) + (3 + 2.4) + \ldots + (3 + 9.4)$.

Ta thấy S_{10} là tổng 10 số hàng của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

$\Rightarrow S_{10} = \dfrac{10}{2}(2.3 + 9.4) = 210$ que.

7. Cấp số nhân 5; 10; …; 1280 có bao nhiêu số hạng?

A. 9. B. 7. C. 8. D. 10.

Xét cấp số nhân (u_n)với $u_1 = 5, q = 2$

Ta có: $u_n = u_1 . q^{n-1} \Leftrightarrow 1280 = 5.2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^8 \Leftrightarrow n = 9$

Vậy cấp số nhân đã cho có 9 số hạng.

8. Cho số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|\, i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = \dfrac{7}{3}$. **B**. $S = -5$. C. $S = 5$. D. $S = -\dfrac{7}{3}$.

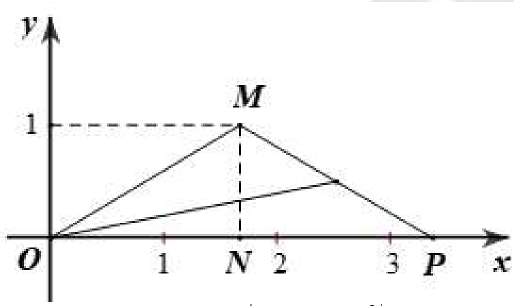
Ta có: $z + 1 + 3i - |z|\, i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - i\sqrt{a^2 + b^2} = 0$

$\Leftrightarrow a + 1 + \left(b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2}\right) i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \begin{cases} b \geq -3 \\ (b + 3)^2 = 1 + b^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = -5.$

9. Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $\widehat{MON} = 30°$. Tính $S = |z_1^2 + 4z_2^2|$.

A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{3}$. **C**. $4\sqrt{7}$. D. $\sqrt{5}$.



Ta có: $S = |z_1^2 + 4z_2^2| = \left|z_1^2 - (2iz_2)^2\right| = |z_1 - 2iz_2| . |z_1 + 2iz_2|$

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $2iz_2$.

Khi đó ta có $|z_1 - 2iz_2| . |z_1 + 2iz_2| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}\right| . \left|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{PM}\right| . \left|2\overrightarrow{OI}\right| = 2PM . OI$. (I là trung điểm PM)

Do $\widehat{MON} = 30^0$ nên áp dụng định lí cosin ta tính được $MN = 1$. Khi đó ΔOMP có MN đồng thời là đường cao và đường trung tuyến, suy ra ΔOMP cân tại $M \Rightarrow PM = OM = 2$.

Áp dụng định lí đường trung tuyến cho ΔOMN ta có: $OI^2 = \dfrac{OM^2 + OP^2}{2} - \dfrac{MP^2}{4} = 7$.

Vậy $S = 2PM . OI = 2.2.\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$.

10. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính u_{21}.

A. $u_{21} = 3080$. B. $u_{21} = 3312$. **C**. $u_{21} = 2871$. D. $u_{21} = 3011$.

Từ $u_{n+1} = u_n + n^2$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$u_2 = u_1 + 1^2$.

$u_3 = u_2 + 2^2$.

...

$u_n = u_{n-1} + (n-1)^2$.

$u_{n+1} = u_n + n^2$.

Cộng n đẳng thức trên theo vế ta được: $u_{n+1} = 1 + \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác, ta luôn có: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ nên suy ra

$u_{n+1} = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

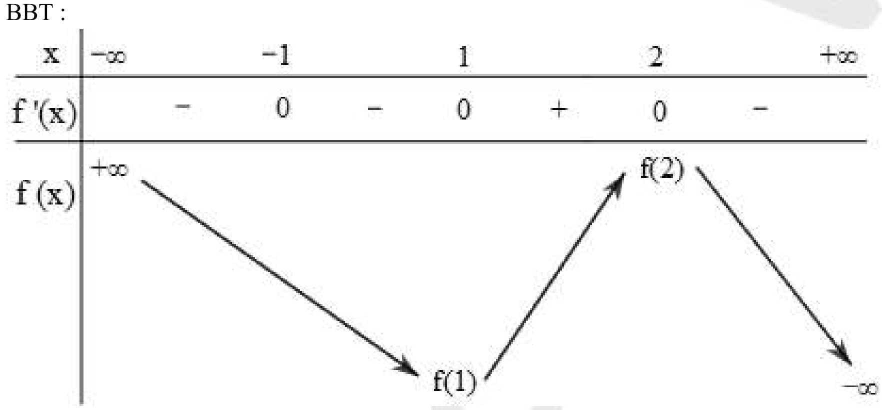
Cho $n = 20$, ta được: $u_{21} = 1 + \dfrac{20.21.(2.20+1)}{6} = 2871$.

11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B**. $(1;2)$. C. $(-\infty;-1)$. D. $(-1;1)$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

BBT :



Dựa vào BBT, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 30° . **B**. 45°. C. 60° . D. 90° .

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH \perp AC$

Mà $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\widehat{BSH}$.

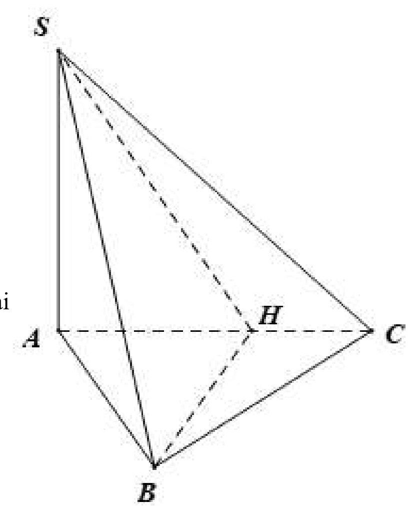
Xét tam giác ABH vuông tại H , $BH = AB.\sin 60^\circ = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$AH = AB.\cos 60^0 = 2a.\dfrac{1}{2} = a$.

Xét tam giác SAH vuông tại S có: $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

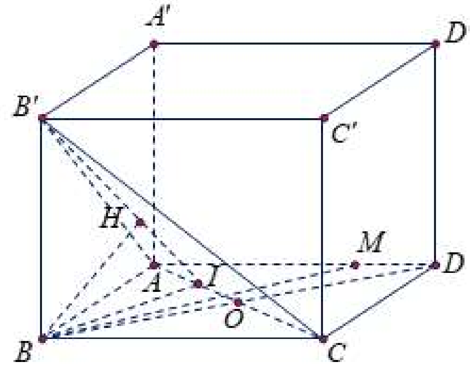
Xét tam giác SBH vuông tại H có: $SH = HB = a\sqrt{3}$ suy ra tam giác SBH vuông tại H .

Vậy $\widehat{BSH} = 45^\circ$.



13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = a$. Gọi M là điểm trên đoạn AD với $\dfrac{AM}{MD} = 3$. Gọi x là độ dài khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' , $B'C$ và y là độ dài khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(AB'C\right)$. Tính giá trị xy .

A. $\frac{5a^5}{3}$. **B**. $\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{3a^2}{4}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.



Ta có: $B'C // A'D \Rightarrow B'C // \left(ADD'A'\right) \supset AD' \Rightarrow d\left(B'C, AD'\right)$

$= d\left(C, \left(ADD'A'\right)\right) = CD = a$.

Suy ra $x = a$.

Lại có: $\frac{MA}{DA} = \frac{3}{4} \Rightarrow d\left(M, \left(AB'C\right)\right) = \frac{3}{4}d\left(D, \left(AB'C\right)\right)$

$= \frac{3}{4}d\left(B; \left(AB'C\right)\right)$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B lên AC ta có: $\begin{cases} AC \perp BI \\ AC \perp BB' \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp \left(BB'I\right)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên $B'I$ ta có:

$\begin{cases} BH \perp B'I \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \perp \left(B'AC\right) \Rightarrow d\left(B, \left(AB'C\right)\right) = BH$.

Trong tam giác ABC, ta có: $AB.BC = AC.BI \Rightarrow BI = \frac{AB.BC}{AC} = \frac{a.2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

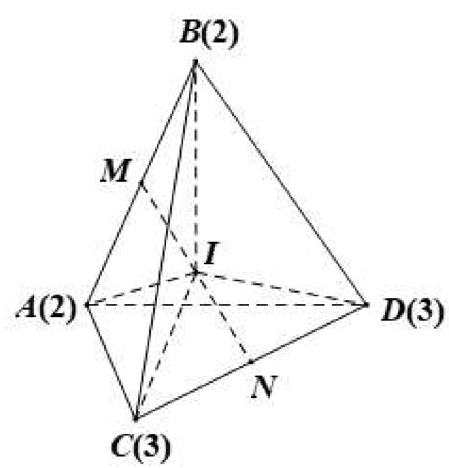
Trong tam giác $BB'I$, ta có: $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BI^2} + \frac{1}{BB'^2} \Rightarrow BH = \frac{BI.BB'}{\sqrt{BI^2 + BB'^2}} = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow d\left(B, \left(AB'C\right)\right) = \frac{3}{4}.\frac{2a}{3} = \frac{a}{2}$. Suy ra $y = \frac{a}{2}$

Vậy $x.y = \frac{a^2}{2}$.

14. Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2,3,3,2 tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{7}{15}$. **D**. $\frac{6}{11}$.



Gọi A, B, C, D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB = 4$, $AC = BD = AD = BC = 5$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Dễ dàng tính được $MN = 2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA = IB, IC = ID$ nên I nằm trên đoạn MN.

Đặt $IN = x$, ta có $IC = \sqrt{3^2 + x^2} = 3 + r$,

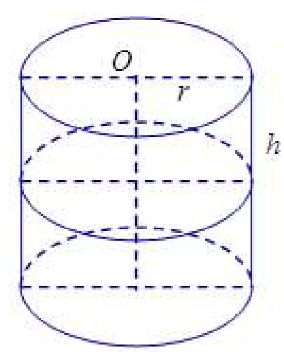
$IA = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3} - x\right)^2} = 2 + r$

Từ đó suy ra $\sqrt{3^2 + x^2} - \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{2} - x\right)^2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{3}}{11}$, suy ra

$r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2} - 3 = \frac{6}{11}$.

15. Cắt một khối trụ cho trước thành hai phần thì được hai khối trụ mới có tổng diện tích toàn phần nhiều hơn diện tích toàn phần của khối trụ ban đầu $32\pi\,\text{dm}^2$. Biết chiều cao của khối trụ ban đầu là 7 dm, tính tổng diện tích toàn phần S của hai khối trụ mới.

A. $S = 120\pi\ \left(\text{dm}^2\right)$. B. $S = 144\pi\ \left(\text{dm}^2\right)$. C. $S = 288\pi\ \left(\text{dm}^2\right)$. D. $S = 256\pi\ \left(\text{dm}^2\right)$.



Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao khối trụ ban đầu (T).

Gọi h_1, h_2 lần lượt là chiều cao của hai khối trụ mới (T_1), (T_2).

Diện tích toàn phần khối trụ (T) là: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Diện tích toàn phần khối trụ (T_1) là: $S_1 = 2\pi rh_1 + 2\pi r^2$.

Diện tích toàn phần khối trụ (T_2) là: $S_2 = 2\pi rh_2 + 2\pi r^2$.

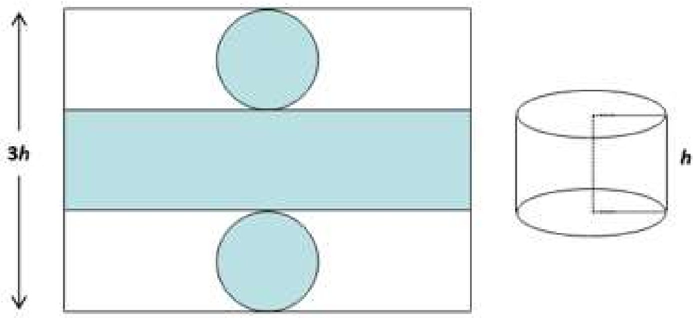
$\Rightarrow S_1 + S_2 = 2\pi r\left(h_1 + h_2\right) + 4\pi r^2$.

Theo đề bài ta có: $S_1 + S_2 - S = 32\pi$

$\Leftrightarrow 2\pi r^2 = 32\pi \Leftrightarrow r = 4$

Vậy $S_1 + S_2 = 2\pi rh + 4\pi r^2 = 2\pi.4.7 + 4\pi.16 = 120\pi\ \left(\text{dm}^2\right)$.

16. Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật sau đó hàn kín lại, như trong hình vẽ dưới đây. Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu. Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng $50,24$ lít. Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu.



A. $1,8\ \left(\mathrm{m}^2\right)$. B. $2,2\ \left(\mathrm{m}^2\right)$. **C**. $1,5\ \left(\mathrm{m}^2\right)$. D. $1,2\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Đổi: $50,24$ (lít) $= 50,24\ \left(\mathrm{dm}^3\right) = 0,05024\ \left(\mathrm{m}^3\right)$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy, bán kính đường tròn đáy của thùng đựng dầu là $R = \dfrac{1}{2}h$.

Thể tích thùng đựng dầu là: $V = \pi R^2 h \Leftrightarrow 0,05024 = \dfrac{\pi h^3}{4} \Rightarrow h = 0,4$.

Diện tích hình chữ nhật ban đầu gấp 3 lần diện tích xung quanh của hình trụ.

Vậy $S = 3.2\pi Rh = 6.3,14.\dfrac{h^2}{2} = 6.3,14.\dfrac{0,4^2}{2} = 1,5072\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

A. 7. **B**. 4. C. 5. D. 6.

Ta có : $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = m.3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = m.3^{\sin^2 x}$.

Đặt $t = sin^2 x$, $t \in [0;1]$. Phương trình đã cho trở thành : $2^t + 3^{1-t} = m.3^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^t + 3^{1-2t} = m$.

Xét hàm số $f(t) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t + 3^{1-2t}$, với $t \in [0;1]$.

Ta có: $f'(t) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t.\ln\dfrac{2}{3} - 2.3^{1-2t}.\ln 3$

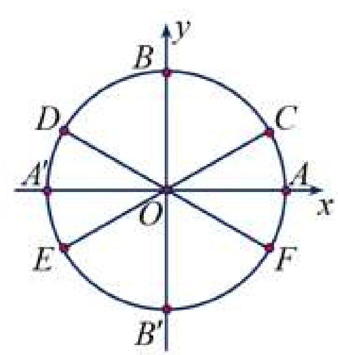
$f''(t) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t.\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)^2 + 4.3^{1-2t}.(\ln 3)^2 > 0\ \forall t \in [0;1]$.

$\Rightarrow f'(t)$ liên tục và đồng biến trên $[0;1]$ nên $f'(t) \le f'(1) = \dfrac{2}{3}\ln\dfrac{2}{9} < 0\ \forall t \in [0;1]$.

$\Rightarrow f(t)$ liên tục và nghịch biến trên $[0;1]$ nên $f(1) \le f(t) \le f(0)\ \forall t \in [0;1]$

Suy ra $1 \le m \le 4$.

18. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



A. Điểm D , điểm C . **B**. Điểm E , điểm F . C. Điểm C , điểm F. D. Điểm E , điểm D.

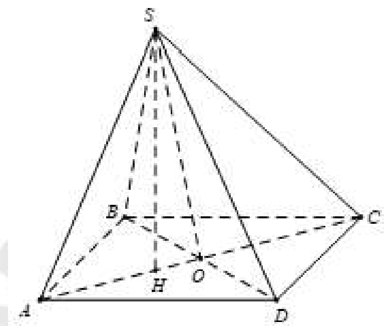
Ta có: $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.\quad (k \in \mathbb{Z})$

Với $k = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6}$ hoặc $x = \dfrac{7\pi}{6}$.

Điểm biểu diễn của $x=-\dfrac{\pi}{6}$ là F , điểm biểu diễn $x=\dfrac{7\pi}{6}$ là E .

19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=x$ còn tất cả các cạnh khác có độ dài bằng 2 . Tính thể tích V lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=1$. B. $V=\dfrac{1}{2}$. C. $V=3$. **D**. $V=2$.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $\Delta BAD=\Delta BSD=\Delta BCD$ nên $AO=SO=CO \Rightarrow SO=\dfrac{1}{2}AC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S

Do đó, $AC=\sqrt{SA^2+SC^2}=\sqrt{x^2+4}$

$\Rightarrow OD=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{4-\dfrac{4+x^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{12-x^2}}{2} \Rightarrow BD=\sqrt{12-x^2}$, $0<x<2\sqrt{3}$

Ta thấy: $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SO \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)$

Trong ΔSAC hạ $SH\perp AC$. Khi đó, $\begin{cases} SH\perp AC \\ SH\perp BD \end{cases} \Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Xét tam giác vuông SAC có: $\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SC^2} \Rightarrow SH=\dfrac{SA.SC}{\sqrt{SA^2+SC^2}}=\dfrac{2.x}{\sqrt{4+x^2}}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+4}.\sqrt{12-x^2}.\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{1}{3}.x.\sqrt{12-x^2}\le\dfrac{1}{3}\dfrac{x^2+12-x^2}{2}=2$

Dấu $''=''$ xảy ra khi và chỉ khi $x^2=12-x^2\Rightarrow x=\sqrt{6}$.

20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+f(x)}$

A. $\dfrac{3}{2}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. C. 1 . D. 2 .

Ta có: $1+f(x)=f(x)f(1-x)+f(x)\Rightarrow\dfrac{f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{1}{f(1-x)+1}$

Xét $I=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+f(x)}$.

Đặt $t=1-x\Leftrightarrow x=1-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó, $I=-\displaystyle\int_1^0\frac{dt}{1+f(1-t)}=\int_0^1\frac{dt}{1+f(1-t)}=\int_0^1\frac{dx}{1+f(1-x)}=\int_0^1\frac{f(x)\,dx}{1+f(x)}$

Mặt khác, $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+f(x)}+\int_0^1\frac{f(x)\,dx}{1+f(x)}=\int_0^1\frac{1+f(x)}{1+f(t)}dx=\int_0^1 dx=1$ hay $2I=1$. Vậy $I=\dfrac{1}{2}$.

21. Biết đồ thị hàm số $y=2x+\sqrt{ax^2+bx+4}$ có tiệm cận ngang $y=-1$. Giá trị $2a-b^3$ bằng

A. 56. **B**. -56. C. -72 . D. 72.

Điều kiện: $ax^2+bx+4\ge 0$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $a>0$.

Khi đó, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{ax^2+bx+4}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{ax^2+bx+4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a-4)x^2+bx+4}{\sqrt{ax^2+bx+4}-2x}=-1$

$\Rightarrow\begin{cases} a-4=0 \\ \frac{b}{-\sqrt{a}-2}=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$. Vậy $2a-b^3=-56$.

22. Từ các chữ số 2 , 3 , 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

A. 1260 . B. 40320 . C. 120 . D. 1728 .

Cách 1. Dùng tổ hợp

Chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có C_9^2 cách.

Chọn vị trí cho 3 chữ số 3 có C_7^3 cách.

Chọn vị trí cho 4 chữ số 4 có C_4^4 cách.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_9^2\,C_7^3\,C_4^4 = 1260$ số.

Cách 2. Dùng hoán vị lặp

Số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\dfrac{9!}{2!3!4!} = 1260$ số.

23. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;1)$, $\vec{b} = (-1;1;2)$, $\vec{c} = (x;3x;x+2)$. Nếu 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì x bằng:

A. 2. B. 1. C. -2. D. -1.

Ta có: $\begin{cases} \vec{a} = (1;2;1) \\ \vec{b} = (-1;1;2) \end{cases} \Rightarrow \left[\vec{a};\vec{b}\right] = (3;-3;3)$.

Khi đó $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a};\vec{b}\right].\vec{c} = 0 \Leftrightarrow 3x - 9x + 3(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

24. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}(C)$, gọi I là tâm đối xứng của đồ thị (C) và $M(a;b)$ là một điểm thuộc đồ thị. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B . Để tam giác IAB có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất thì tổng $a+b$ gần nhất với số nào sau đây?

A. -3. **B**. 0. C. 3. D. 5.

Ta có: $I(-1;2)$; $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a+1}\right)$.

Lại có, $y'_{(a)} = \dfrac{1}{(a+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M : $y = \dfrac{1}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{2a+1}{a+1}$.

Giao của tiếp tuyến và tiệm cận đứng $A\left(-1;\ \dfrac{2a}{a+1}\right)$.

Giao của tiếp tuyến và tiệm cận ngang $B(2a+1;\ 2)$.

Ta có: $IA = \dfrac{2}{|a+1|}$; $IB = 2|a+1|$

$S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2}IA.IB = 2 = p.r$

$p = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2IA.IB} = 2\sqrt{4} + \sqrt{2.4}$

Suy ra $r_{\max}$ khi $p_{\min}$. Khi đó $IA = IB$.

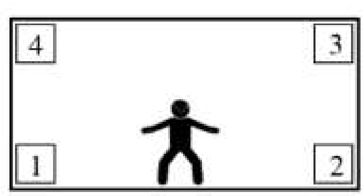
Suy ra M là giao điểm của đường thẳng d đi qua I có hệ số góc $k = -1$ và đồ thị hàm số.

Phương trình qua d có dạng. $y - 2 = -1(x+1) \Leftrightarrow y = -x + 1$.

Hoành độ giao điểm của d và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình.

$-x + 1 = \dfrac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(0;1) \\ M(-2;3) \end{array}\right. \Rightarrow a + b = 1$.

25. Trong trận đấu bóng đá giữa 2 đội Real madrid và Barcelona, trọng tài cho đội Barcelona được hưởng một quả Penalty. Cầu thủ sút phạt ngẫu nhiên vào 1 trong bốn vị trí 1, 2, 3, 4 và thủ môn bay người cản phá ngẫu nhiên đến 1 trong 4 vị trí 1, 2, 3, 4 với xác suất như nhau. Biết nếu cầu thủ sút và thủ môn bay người cùng vào vị trí 1 hoặc 2 thì thủ môn cản phá được cú sút đó, nếu cùng vào vị trí 3 hoặc 4 thì xác suất cản phá thành công là 50%. Tính xác suất của biến cố "cú sút đó không vào lưới"?



A. $\dfrac{5}{16}$. **B**. $\dfrac{3}{16}$. C. $\dfrac{1}{8}$. D. $\dfrac{1}{4}$.

Cách 1.

• Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4.4 = 16$

Gọi biến cố $A =$ "Cú sút đó không vào lưới"

Khi đó biến cố $\overline{A} =$ "Cú sút đó vào lưới"

Số phần tử của $n\left(\overline{A}\right)$ là

• Trường hợp 1. Cầu thủ sút vào vị trí 1 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại
Cầu thủ có 1 cách sút.
Thủ môn có 3 cách bay người.
Do đó, có 3 khả năng xảy ra.

• Trường hợp 2. Cầu thủ sút vào vị trí 2 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại
Cầu thủ có 1 cách sút.
Thủ môn có 3 cách bay người.
Do đó, có 3 khả năng xảy ra.

• Trường hợp 3. Cầu thủ sút vào vị trí 3 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại
Cầu thủ có 1 cách sút.
Thủ môn có 3 cách bay người.
Do đó, có 3 khả năng xảy ra.

• Trường hợp 4. Cầu thủ sút vào vị trí 4 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại
Cầu thủ có 1 cách sút.
Thủ môn có 3 cách bay người.
Do đó, có 3 khả năng xảy ra.

• Trường hợp 5. Cầu thủ sút vào vị trí 3 thủ môn bay vào vị trí 3
Cầu thủ có 1 cách sút
Thủ môn có 1 cách bay người.
Do đó, có 1 khả năng xảy ra.

• Trường hợp 6. Cầu thủ sút vào vị trí 4 thủ môn bay vào vị trí 4
Cầu thủ có 1 cách sút.
Thủ môn có 1 cách bay người.
Do đó, có 1 khả năng xảy ra.

Khi đó $n\left(\overline{A}\right) = 4.3 + 2.1 = 14$.

Xác suất xảy ra biến cố $\overline{A}$ là $p\left(\overline{A}\right) = \frac{4.3}{16} + \frac{2.1}{16}.\frac{1}{2} = \frac{13}{16}$.

Vậy $p\left(A\right) = 1 - p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$.

Cách 2.

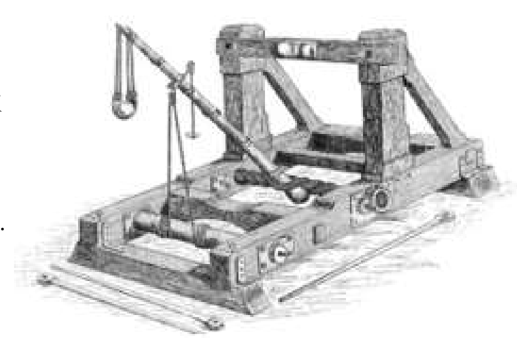
Gọi A_i là biến cố "cầu thủ sút phạt vào vị trí i".
B_i là biến cố "thủ môn bay người cản phá vào vị trí thứ i".
Và C là biến cố "Cú sút phạt không vào lưới".

Dễ thấy, $P\left(A_i\right) = P\left(B_i\right) = \frac{1}{4}$.

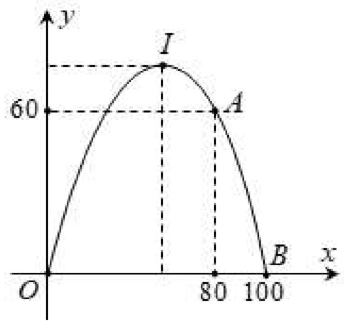
Ta có $P\left(C\right) = P\left(A_1\right)P\left(B_1\right) + P\left(A_2\right)P\left(B_2\right) + \frac{1}{2}P\left(A_3\right)P\left(B_3\right) + \frac{1}{2}P\left(A_4\right)P\left(B_4\right)$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

26. Đạn bắn ra từ 1 máy bắn đá có quỹ đạo là một Parabol (P). Biết rằng đạn của máy bắn đá bắn xa 100m và tại thời điểm đạn cao 60 m thì đạn cách điểm bắn 80m.
1. Vị trí đạn bay cao nhất cách mặt đất bao nhiêu?
2. Máy bắn đá cách tường thành địch 90m. Biết tường thành cao 30m. Hỏi đạn pháo có vượt qua được tường thành không?
3. Địch xây chòi phòng thủ cao 20m phía trước tường thành. Hỏi phải đặt máy bắn đá cách chòi bao xa để đạn có thể bắn trúng chòi? Biết rằng để tránh bị địch tấn công thì máy bắn đá phải đặt cách thành địch ít nhất 50m.



1. Đặt hệ trục như hình vẽ.



Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$. Ta có (P) qua $O(0;0)$, $A(80;60)$ và $B(100;0) \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 80^2a + 80b = 60 \\ 100^2a + 100b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{80} \\ b = \frac{15}{4} \end{cases}$.

$\Rightarrow (P): y = -\dfrac{3}{80}x^2 + \dfrac{15}{4}x$ Vị trí đạn bay cao nhất cách mặt đất là $y_I = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = \dfrac{375}{4} = 93,75m$.

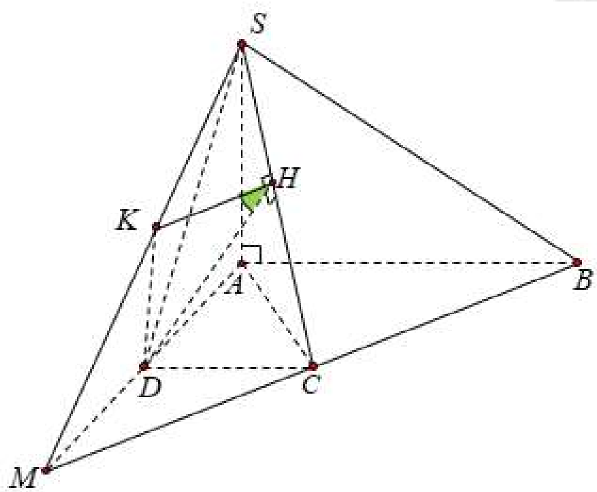
2. $(P): y = -\dfrac{3}{80}x^2 + \dfrac{15}{4}x$. Vì máy bắn đá cách tường thành địch $90m$ nên $x = 90 \Rightarrow y = 33,75\,(m) > 30\,(m) \Rightarrow$ đạn pháo vượt qua được tường thành.

3. Để máy bắn đá có thể bắn trúng chòi cao $20m$ thì $-\dfrac{3}{80}x^2 + \dfrac{15}{4}x = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 94,35\,(m) \\ x = 5,65\,(m)\,(L) \end{array}\right.$. Vậy cần đặt máy bắn đá cách chòi $94,35m$ để đạn có thể bắn trúng chòi.

27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$.

1. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).
2. Tính thể tích chóp $S.ABCD$.

1. Cách 1.



Gọi $M = BC \cap AD$. Khi đó. $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \left(\widehat{(SCM),(SCD)}\right)$ Gọi H là hình chiếu của D lên SC, kẻ $HK \,//\, MC$ $(K \in SM)$ ta có: $\left(\widehat{(SCM),(SCD)}\right) = \widehat{KHD} = \alpha$ Xét ΔSCD vuông tại D ta có:

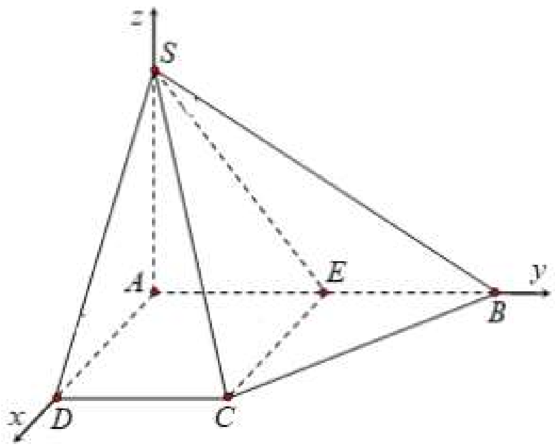
$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DC^2} + \dfrac{1}{DS^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. $HC = \dfrac{DC^2}{SC} = \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}$. Do $HK \,//\, MC$ mà $\dfrac{SH}{SC} = \dfrac{3}{4}$ nên

$HK = \dfrac{3}{4}a\sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$; $KM = \dfrac{1}{4}SM = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Xét tam giác DMK có:

$$\begin{aligned} DK^2 &= MD^2 + MK^2 - 2MD.MK.\cos\widehat{DMK} \\ &= MD^2 + MK^2 - 2MD.MK.\tfrac{AM}{SM} \\ &= MD^2 + MK^2 - 2MD.MK.\tfrac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} \\ &= a^2 + \left(\tfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 2.a.\tfrac{a\sqrt{6}}{4}.\tfrac{2a}{a\sqrt{6}} = \tfrac{3a^2}{8} \end{aligned}$$

$\Rightarrow DK = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Xét tam giác KDH ta có: $\cos\alpha = \dfrac{HD^2 + HK^2 - KD^2}{2HK.HD} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Cách 2. Chọn hệ trục như hình vẽ



Ta có $A(0;\ 0;\ 0)$; $D(a;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ 2a;\ 0)$; $E(0;\ a;\ 0)$; $C(a;\ a;\ 0)$; $S\left(0;\ 0;\ a\sqrt{2}\right)$. $\overrightarrow{SC}=\left(a;\ a;\ -a\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{SB}=\left(0;\ 2a;\ -a\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{SD}=\left(a;\ 0;\ -a\sqrt{2}\right)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\vec{n}_1=-a^2\sqrt{2}\left(1;\ 1;\ \sqrt{2}\right)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD) là $\vec{n}_2=-a^2\left(\sqrt{2};\ 0;\ 1\right)$. Khi đó góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là

$\cos\varphi=\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Ta có: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{3a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.